

教員名：佐藤勝昭

Web site <http://home.sato-gallery.com/>  
e-mail address: [katsuaki.sato@nifty.com](mailto:katsuaki.sato@nifty.com)

第 3 回の質問・感想・注文など

1. 媒質が等方性(であるか異方性であるか)によって誘電率テンソルの形が変わるということは、同じ物質でも結晶面、結晶性が異なれば光に対して異なる応答を示すということなのでしょうか。(U 君)

A: Good question! そのとおりです。どの結晶面に対し、どのような偏光をどの角度で入射するかによって変わってきます。

2. 左右の円偏光で $\kappa^+$ と $\kappa^-$ は異なるとしたのに、 $n^+$ は同じとする根拠などはあるのでしょうか。こうすればうまく説明できるということなのでしょうけれど、何かここだけ唐突な感じがします。(O1 君)

A: 質問の意味がわかりません。たぶん誤解です。旋光性を議論するときには、 $\kappa^+=\kappa^-$ として $\Delta n$ のみを考えますし、円二色性(楕円性)を議論するときには、 $n^+=n^-$ として $\Delta\kappa$ のみを考えるのです。(一般には両方が存在するので $\Delta n$ も $\Delta\kappa$ も0ではありませんが、議論を簡単にするため、旋光性と円二色性を別々に扱っているのです。)

3. 円偏光について、数式への載せ方がわかりました。(K1 君)、円偏光などに関する数式的な扱いがとてもわかりやすく、数学と物理がつながったように思います。(N 君)

4. 偏光の描写で式と図のイメージが頭の中で合致できませんでした。(Y1 君)

A: よくわかったという人もいますので、学生同士で教えあってください。

5. 円偏光の単位ベクトルがよく理解できませんでした。(T 君)

A: 時間とともに回転することを表すために、 $i+j$ ,  $i-j$ という形にしました。虚数単位がかかっているのはy軸がx軸より90度位相がずれていることを意味しています。

6. 楕円率角についてよく理解できなかった。誘電率テンソルを用いる理由がわかりやすかった。(K2 君)

7. 誘電率が複素数であり、その虚数部が損失を表現するという話がわかりやすかったです。(虚数という数学的概念のままでは物理的意味が理解できないので) 毎回これくらい丁寧にやっていたらと助かります。(O2 君)

A: 入り口で躓くと、後がわからなくなるので、丁寧にやりました。しかし、この調子では終わらなくなるので、だんだんスピードアップします。しかし、式の物理的意味だけはフォローできるように説明します。

8. 誘電率は $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ というふうの実数と虚数を使って表され、左右円偏光の単位ベクトルは $(i \pm ij)/\sqrt{2}$ というふうの実虚数両方を使っていますが、虚数をわざわざ利用する意味を知りたいです。(4年 Y 君)

A: これは、波動をsin, cosではなく、expを使って表現していることによるものです。expを使うと微分しても積分しても関数形が代わらないので、式の取り扱いが便利になります。expで扱う場合は、物理量を求める演算の最後に実数部をとることが前提となっています。

9. 誘電率と導電率の関係はどこから導かれたのですか。(K3 君)

A: マクスウェルの方程式をやった後で説明しようと思っていました。教科書「光磁気(改訂版)」の3.3.4節(p.34)に載っています。(Webにpdfがアップしてあります。)

$D$ を分極 $P$ を用いて表すと

$$D = \epsilon_0 E + P$$

マクスウェル方程式(3.17)の第2式の右辺は、

$$\frac{\partial D}{\partial t} + J = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial t} + J$$

となるが、この式の右辺第2項は分極電流(変位電流)、第3項は伝導電流であるから、2つの電流の和を $J'$ とおき、さらに

$$J' = \partial E$$

と置き換えると、

$$\text{rot } H = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} + \partial E \quad (3.34)$$

と書き表すことができる。さらに $H$ および $E$ に式(3.21)の形の解を仮定すると式(3.17)の第2式は

$$K \times H = -\omega \epsilon_0 \left( 1 + i \frac{\tilde{\sigma}}{\omega \epsilon_0} \right) E = -\omega \epsilon_0 \tilde{\epsilon} E$$

となる。ここに $\mathbf{1}$ は2階の単位テンソルである。これより、誘電テンソルと伝導率テンソルの間の関係として、

$$\tilde{\epsilon} = \mathbf{1} + i \frac{\tilde{\sigma}}{\omega \epsilon_0} \quad (3.35)$$

を得る。テンソル成分で表せば、

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + i \frac{\sigma_{ij}}{\omega \epsilon_0} \quad (3.36)$$

が導かれた。ここに、 $\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタである。

10. Onsager の式が美しいと思いました。(O3 君)

11. Onsager の定理が成立する理由がよくわかりません。(M 君)

A: 慶應のシラバスによるとオンサガーの定理は「熱統計力学第2」(齋藤幸夫先生)の中で扱っているようです。ノートを読み返してください。

12. やはり配付資料が小さくて書き込むスペースがないのもう少し大きくできませんか?(H 君)

A: ノートをとることは大切です。配付資料はあくまで、参考資料です。

13. 等方性、異方性という言葉自体があまりよくわからなかったののでしっかり復習したい。(4年 M 君)

物性物理学特論A

— 第3回 電磁気学に基づく磁気光学の理論  
(2) Faraday効果

佐藤勝昭  
慶應義塾大学講師(非常勤)  
東京農工大学名誉教授・工学府特任教授  
(独)科学技術振興機構(JST)戦略的創造研究事業さがけ  
「革新的次世代デバイスを目指す材料とプロセス」研究総括

復習コーナー  
第3回に学んだこと

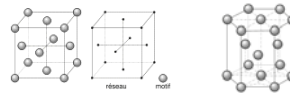
- 電磁気学に基づく光と磁気の理論(1)
  - 円偏光と磁気光学効果について学びました。
  - 光と物質の結びつきを誘電率テンソルで表されることを学びました。

前回の質問

- 媒質が等方性(であるか異方性であるか)によって誘電率テンソルの形が変わるということは、同じ物質でも結晶面・結晶性が異なれば光に対して異なる応答を示すということなのでしょうか。(U君)
  - Good question! そのとおりです。どの結晶面に対し、どのような偏光をどの角度で入射するかによって変わってきます。

異方性媒質中の光の伝搬  
— 複屈折と光学遅延 —

- 等方性vs異方性  
等方性: 誘電率が方位に依存しない。例: GaAs  
異方性: 誘電率が方位に依存する。例: GaN
  - 一軸異方性: 特定の方位とそれに垂直な方位とで値が異なる



誘電率テンソル

- 特定の方向(いま、x軸としておく)の誘電率の成分が、それに垂直な方向の誘電率の成分と異なる場合、異方性があるという。異方性のある場合、電界ベクトルEの向きと電束密度ベクトルDの向きは一般に平行ではない。従って、 $D = \epsilon_0 \epsilon \cdot E$ の式において、比誘電率 $\epsilon$ はスカラーではなくテンソルを使って、次式で表さなければならない。
 
$$\vec{D} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & & \\ & \epsilon_{yy} & \\ & & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} E$$
- ここで、問題を簡単にするために、x方向が、y, z方向と異なるような一軸異方性を持つとする。(x軸を光軸という。)このとき $\epsilon_{xx} \neq \epsilon_{yy} = \epsilon_{zz}$ となるので、 $\epsilon$ テンソルは $\epsilon_{xx}$ と $\epsilon_{zz}$ の2成分で記述できる。
 
$$\vec{D} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & & \\ & \epsilon_{zz} & \\ & & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} E$$

異方性媒質中の光の伝搬  
(1) 光軸(x方向)に進む波

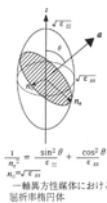
- x方向に進む波とz方向に進む波の2つの場合についてのみ考察する。
- x方向に進む波についてマクスウェルの方程式を適用すると、永年方程式は
 
$$\begin{pmatrix} -\epsilon_{xx} & & \\ & N^2 - \epsilon_{zz} & \\ & & N^2 - \epsilon_{zz} \end{pmatrix} E = 0$$
- となるので、Nの固有値は $N^2 = \epsilon_{zz}$
- のみとなり、あたかも屈折率 $\epsilon_{zz}^{1/2}$ の等方性媒質中を伝搬する波のように伝搬する。

異方性媒質中の光の伝搬  
(2) 光軸に垂直(z方向)に進む波

- 異方性軸に垂直の方向(z軸方向)に進む波  
 $E = E_0 e^{-i\omega(t - Nz/c)}$   
についての永年方程式は
 
$$\begin{pmatrix} N^2 - \epsilon_{xx} & & \\ & N^2 - \epsilon_{zz} & \\ & & -\epsilon_{zz} \end{pmatrix} E = 0$$
- となる(問題4.2参照)ので、Nの固有値は $N^2 = \epsilon_{xx}$  または  $N^2 = \epsilon_{zz}$  となっており、2つの値を持つ。
- それぞれに対応する固有関数は、x方向に偏り屈折率 $\epsilon_{xx}^{1/2}$ をもつ波と、x軸に垂直なy方向に偏り、屈折率 $\epsilon_{zz}^{1/2}$ をもつ波である。

複屈折(birefringence)と  
屈折率楕円体(indicatrix)

- z方向に進む波は、電界のx成分とy成分と異なる屈折率を見ることがなる。これを複屈折という。方解石を用いて文字を見ると二重に見える。これは、異常光線がスネルの法則に従わないからである。一軸異方性をもつ物質の任意の入射方向に対する屈折率は図4.1.1のような屈折率楕円体で表すことができる。すなわち常光線については、 $n = \epsilon_{zz}^{1/2}$ の球で、異常光線については、回転軸方向の屈折率が $n = \epsilon_{xx}^{1/2}$ でそれに垂直な方向の屈折率が $n = \epsilon_{zz}^{1/2}$ であるような回転楕円体によって表される。



異方性媒体と光学遅延

- いま簡単のために誘電率が実数であるとする。電界ベクトルがxy面内でx軸から45°傾いているような偏光がこの媒体のz方向に入射したとする。媒体中をz方向に長さzだけ進んだ位置での電界をみると、x成分の位相変化は $\omega \epsilon_{xx}^{1/2} z/c$ であるのに対し、y成分の位相変化は $\omega \epsilon_{zz}^{1/2} z/c$ であるから差し引きすると $\delta = \omega(\epsilon_{xx}^{1/2} - \epsilon_{zz}^{1/2})z/c$  (4.1.20)の位相差を受けることになる。この位相差 $\delta$ のことを光学的遅延(リターデーション)と呼んでいる。
- 位相差 $\delta$ が $\pm\pi/2$ (4分の1波長)となると、電界ベクトルの軌跡は円となる。これを円偏光と呼ぶ。 $\delta$ が $\pm\pi$ (半波長)となると、電界ベクトルの軌跡は入射光と90°傾いた直線偏光となる。
- 水晶やサファイアなど異方性を持つ結晶を適当な厚みに切り出すと、4分の1波長板や半波長板を作ることができる。一般にこのような光学素子を移相板と呼んでいる。直線偏光と4分の1波長板を組み合わせた円偏光を作ることができる。

第4回に学ぶこと

- 今回は光と磁気第3章3.3と3.4に沿ってお話します。
- 光の伝搬とマクスウェルの方程式
  - 固有解: 波動解、固有値: 複素屈折率
- ファラデー配置の場合の固有値と固有状態
  - 2つの固有値と対応する固有状態(円偏光)
- ファラデー効果の現象論
  - ファラデー効果と誘電率テンソル
- フォーク配置の場合の固有値と固有状態
  - コットンムートン効果: 磁気誘起の複屈折

## マクスウェルの方程式

- 光の電界ベクトルを $E$ 、電束密度ベクトルを $D$ 、磁界ベクトルを $H$ 、磁束密度ベクトルを $B$ 、電流を $J$ とすると、次の関係が成立します。

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{電磁誘導の法則} \quad (3.17)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad \text{アンペールの法則}$$

(SI単位系)



## マクスウェル方程式をEとHで表す

- 簡単のため、 $J=0$ と置きます。  
[つまり、伝導電流を分極電流(変位電流)の中に絡り込みます]

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \quad \text{誘電率テンソル}$$

$$\mathbf{D} = \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \mathbf{E}$$

- (3.17)に代入すると次の関係式が得られます。

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3.18)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

式(3.18)においては、微分方程式が2個、実数もEとHの2個ですから、解を求めることができます。

## マクスウェル方程式を解く: 2つの方法

- 1つは、第2式を $t$ で1回偏微分し  $\partial / \partial t$  とrotの順番を入れ替え、 $\partial H / \partial t$ に第1式を代入します。この後、 $\exp(-i\omega t + iK r)$ の形の波動式を代入し、Eについての2次方程式を得ます。
- もう1つは、EとHに先に $\exp(-i\omega t + iK r)$ の形の波動関数を代入し、通常の連立1次方程式にします。ここでHを消去するとEについての2次方程式を得ます。(教科書「光と磁気」では後のやり方を使っています。)

## マクスウェル方程式を解く [1]

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3.18)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- 第2式を $t$ で1回偏微分し  $\partial / \partial t$  とrotの順番を入れ替え、 $\partial H / \partial t$ に第1式を代入します。この後、 $\exp(-i\omega t + iK r)$ の形の波動式を代入し、Eについての2次方程式を得ます。

## マクスウェル方程式を解く [1]-1

- (3.18)の第2式の両辺を $t$ で偏微分します。

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{H} = \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

- $\partial / \partial t$  とrotの順番を入れ替えます。

$$\text{rot } \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

- ここに(3.18)の第1式

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{E} \quad \text{を代入します。}$$

## マクスウェル方程式を解く [1]-2

これより  $\text{rot}(-\frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}) = \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$  が得られ、

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\tilde{\epsilon} \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{\tilde{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \text{となります。}$$

ここで、 $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$  という関係を用いました。

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\frac{\tilde{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \text{をマクスウェルの方程式とすることがあります。}$$

## マクスウェル方程式を解く [1]-3

- ここで、rot、grad、divの間に成り立つ次の公式を用います。

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E}$$

- この結果Eについての2階の微分方程式が得られます。

$$\text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\tilde{\epsilon} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

- この式に次の波動の式  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \cdot \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})$  を代入するとEについての方程式(3.20)が得られます。

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{K})\mathbf{K} - |\mathbf{K}|^2 \mathbf{E} + (\omega/c)^2 \tilde{\epsilon} \mathbf{E} = 0 \quad (3.20)$$

## 自習課題(1) [提出の必要はありません]

- 始めにrot Aにrotを及ぼすとどうなるか確かめてください。(物理数学などで学んだはずですが)

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \text{grad}(\text{div } \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

- 次に、

$$\text{grad div } \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\tilde{\epsilon} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

に波動の式  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \cdot \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})$  を代入し

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{K})\mathbf{K} - |\mathbf{K}|^2 \mathbf{E} + (\omega/c)^2 \tilde{\epsilon} \mathbf{E} = 0 \quad \text{が成立することを確かめてください。}$$

## マクスウェル方程式を解く [2]

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (3.18)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

- EとHに、 $\exp(-i\omega t + iK r)$ の形の波動関数を代入し、通常の連立1次方程式にします。ここでHを消去するとEについての2次方程式を得ます。

## マクスウェル方程式を解く [2]-1

- ここでは、微分演算を使わない方法を紹介します。EおよびHについての波動の式は、波数ベクトル $K$ として

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t) \cdot \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \quad (3.19)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \exp(-i\omega t) \cdot \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})$$

のように表すことができます。ここに $E_0, H_0$ は時間や距離に依存しない定数ベクトルです。

- 式(3.19)をマクスウェルの方程式(3.18)に代入すると、

$$\mathbf{K} \times \mathbf{E} = \omega \mu_0 \mathbf{H}$$

$$\mathbf{K} \times \mathbf{H} = -\omega \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \mathbf{E}$$

となります。

## マクスウェル方程式を解く [2]-2

- 両式からHを消去し、

$$\mathbf{K} \times \mathbf{H} = \mathbf{K} \times \frac{1}{\omega \mu_0} (\mathbf{K} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{\omega \mu_0} \mathbf{K} \times \mathbf{K} \times \mathbf{E} = -\omega \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \mathbf{E}$$

固有方程式として

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{K}) \mathbf{K} - |\mathbf{K}|^2 \mathbf{E} + (\omega/c)^2 \tilde{\epsilon} \mathbf{E} = 0 \quad (3.20)$$

が得られます。

ここにKは波数ベクトルです。

## 自習課題(2)[提出の必要はありません]

- 式(3.19)を式(3.18)に代入して式(3.20)を導いてください。ここで、ベクトル積の公式

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{C}$$

を利用してください。

## 固有方程式を解く [1]

- いずれの手続きでも式(3.20)が導かれました。

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{K}) \mathbf{K} - |\mathbf{K}|^2 \mathbf{E} + (\omega/c)^2 \tilde{\epsilon} \mathbf{E} = 0 \quad (3.20)$$

それでは(3.20)を解いてKの固有値と対応する電界ベクトルEの固有関数を求めましょう。

- ここで複素屈折率、すなわち、 $\hat{N} = n + i\kappa$ を導入します。ここにnは屈折率、 $\kappa$ は消光係数です。
- 媒質中において波数Kは  $K = \omega \hat{N} / c = \omega n / c + i\omega \kappa / c$  実数部は空間的な波の波長を与えます
- [注]  $K = \omega \hat{N} / c = \omega n / c + i\omega \kappa / c$  虚数部は波の減衰を与えます。

[注] 波数Kは $2\pi/\lambda$ となる。ここには媒質中での波長で、媒質中での光速をcとすると $\omega/c$ と表される。媒質中での光速は屈折率をとると $\omega/n$ で与えられるから、 $K = \omega n / c$ である。ここで屈折率を拡張して複素屈折率N、すなわち $n+i\kappa$ を導入すると、上の式となる。

## 複素屈折率 $n+i\kappa$

- 電磁波の空間変化を $\exp(iKz)$ で表します。
- $K = \omega N / c = \omega (n + i\kappa) / c$ とします。
- $\exp(iKz) = \exp(i\omega n z / c) \exp(-\omega \kappa z / c)$ と書けます。
- この波動は、振幅が距離zとともに振動しながら減衰する波を表します。
- 光の強度の減衰を表すときには $|\exp(iKz)|^2$ を考えます。 $|\exp(iKz)|^2 = \exp(-2\omega \kappa z / c)$
- これを吸収係数 $\alpha$ を用いて $\exp(-\alpha z)$ に等しいと置くと、 $\alpha = 2\omega \kappa / c = 4\pi \kappa / \lambda$ と表すことができます。

## 固有方程式を解く [2]

- 波数ベクトルの向きに平行で長さが $\hat{N}$ であるような屈折率ベクトル $\hat{N}$ を用いると、(3.19)の第1式は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[-i\omega(t - \hat{N} \cdot \mathbf{r} / c)] \quad (3.21)$$

となり、固有方程式(3.20)は

$$\hat{N}^2 \mathbf{E} - (\mathbf{E} \cdot \hat{N}) \hat{N} - \tilde{\epsilon} \mathbf{E} = 0 \quad (3.22)$$

によって記述できます。

- 以下では、第2回に述べた2つの配置(ファラデー配置とフォークト配置)について固有値を求めます。

## ファラデー配置の場合

- 磁化がz軸方向にあるとして、z軸に平行に進む波(N//z)に対して式(3.21)は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp[-i\omega(t - \hat{N}_z / c)] \quad (3.23)$$

- と表されます。固有方程式(3.22)は

$$\begin{pmatrix} \hat{N}^2 - \epsilon_{xx} & -\epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

と書けます。この式は下に2式に分けられます。

$$\begin{pmatrix} \hat{N}^2 - \epsilon_{xx} & -\epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \epsilon_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0, \quad (3.24') \quad -\epsilon_{zz} E_z = 0 \quad (3.24'')$$

## 永年方程式

- 式(3.24)がEの如何によらず成立するには、

$$\begin{vmatrix} \hat{N}^2 - \epsilon_{xx} & -\epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \epsilon_{xx} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.25) \quad \Rightarrow \quad (\hat{N}^2 - \epsilon_{xx})^2 + \epsilon_{xy}^2 = 0$$

- これより、 $\hat{N}^2$ の固有値として2個の値  $\hat{N}_{\pm}^2 = \epsilon_{xx} \pm i\epsilon_{xy}$  (3.26)

- を得られます。これらの固有値に対応する固有関数は、

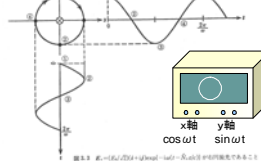
$$\mathbf{E}_{\pm} = \frac{\mathbf{E}_0}{2} (i \pm j) \exp[-i\omega(t - \frac{\hat{N}_{\pm}}{c} z)] \quad (3.27)$$

- $\mathbf{E}_+$ 、 $\mathbf{E}_-$ は、それぞれ、右円偏光、左円偏光に対応します。

## $\mathbf{E}_+$ 、 $\mathbf{E}_-$ は、それぞれ、右円偏光、左円偏光に対応

$$\mathbf{E}_+ = \frac{\mathbf{E}_0}{2} (i + j) \exp(-i\omega t) \quad \text{実数部のみを考えると}$$

$$\text{Re}(\mathbf{E}_+) = \frac{\mathbf{E}_0}{2} [\cos \omega t \mathbf{i} + \sin \omega t \mathbf{j}]$$



- 直交する2つの直線偏光の位相が90度異なっているときに合成したベクトルの軌跡は円になります。
- x軸に $\cos \omega t$ 、y軸に $\sin \omega t$ を入力したときのオシロスコープのリサージュ波形を思い出してください。

図の出典: 佐藤勝昭「光と磁気」

## 提出課題

- Z軸に平行に進む波に対して固有方程式(3.22)は(3.24)になること、および、Eの如何に関わらず成立するには(3.25)が成立すること、固有値が(3.26)で与えられることを導いてください。

$$\begin{pmatrix} \hat{N}^2 - \epsilon_{xx} & -\epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{N}^2 - \epsilon_{xx} & -\epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \epsilon_{xx} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.25)$$

$$\hat{N}_{\pm}^2 = \epsilon_{xx} \pm i\epsilon_{xy} \quad (3.26)$$

## ここまでのまとめ

- 光の伝搬をマクスウェルの方程式で記述すると、磁化された等方性物質の複素屈折率は

$$\hat{N}_{\pm}^2 = \epsilon_{xx} \pm i\epsilon_{xy}$$

で与えられる2つの固有値をとり、それぞれが右円偏光および左円偏光に対応します。

(ここに、 $\epsilon_{xx}$ は誘電テンソルの対角成分、 $\epsilon_{xy}$ は非対角成分である。)

- もし $\epsilon_{xy}$ が0であれば、円偏光は固有関数ではなく、磁気光学効果は生じません。

## ファラデー効果の現象論

- 前回に述べたようにテンソルの非対角成分が存在すると、物質の左右円偏光に対する応答の違いを生じ、その結果ファラデー効果が生じます。ファラデー効果の回転角、楕円率などが誘電率テンソル  $\epsilon$  の成分を使ってどのように書き表せるかを述べます。
- 結論から先に述べると、ファラデー回転角  $\phi_F$ 、ファラデー楕円率  $\eta_F$  は  $\epsilon_{xy}$  の実数部と虚数部との一次結合で与えられることが導かれます。
  - まず、右円偏光および左円偏光に対する屈折率  $n_+$  と  $n_-$ 、消光係数  $\kappa_+$  と  $\kappa_-$  および  $\epsilon_{xy}$  との関係からスタートします。

## 左右円偏光に対する光学定数の差と誘電率テンソルの成分の関係

- すでに述べたように、磁化と平行に進む光の複素屈折率の固有値は
 
$$\hat{N}_{\pm}^2 = \epsilon_{xx} \pm i\epsilon_{xy} \quad (3.26)$$
 と書けますが、複号を別々に書くと、
 
$$\hat{N}_+ = n_+ + i\kappa_+, \quad \hat{N}_- = n_- + i\kappa_-$$
 となります。
 

ここで、
 
$$\Delta n = n_+ - n_-; \Delta\kappa = \kappa_+ - \kappa_-; n = \frac{n_+ + n_-}{2}; \kappa = \frac{\kappa_+ + \kappa_-}{2}$$
 という置き換えをすると、
 
$$\begin{cases} n_+ = n + \Delta n/2; & n_- = n - \Delta n/2 \\ \kappa_+ = \kappa + \Delta\kappa/2; & \kappa_- = \kappa - \Delta\kappa/2 \end{cases}$$
 となるので、
 
$$\hat{N}_+ = n_+ + i\kappa_+ = (n + \Delta n/2) + i(\kappa + \Delta\kappa/2) = (n + i\kappa) + (\Delta n + i\Delta\kappa)/2$$

## 左右円偏光に対する光学定数の差 $\Delta N$ と誘電率テンソルの成分の関係 (1)

$$\hat{N}_{\pm} = n \pm \frac{\Delta n}{2} + i\left(\kappa \pm \frac{\Delta\kappa}{2}\right) = (n + i\kappa) \pm \frac{1}{2}(\Delta n + i\Delta\kappa) \equiv N \pm \frac{1}{2}\Delta N \quad (3.37)$$

$$\Delta N = N_+ - N_- = \Delta n + i\Delta\kappa \quad (3.38)$$

- この  $N_{\pm}$  を (3.26) に代入して

$$\hat{N}_{\pm}^2 = \left(N \pm \frac{1}{2}\Delta N\right)^2 \approx N^2 \pm \hat{N}\Delta N = \epsilon_{xx} \pm i\epsilon_{xy} \quad (3.26')$$

$$\begin{cases} \epsilon'_{xx} = n^2 - \kappa^2; & \epsilon''_{xx} = 2n\kappa \\ \epsilon'_{xy} = n\Delta\kappa + \kappa\Delta n; & \epsilon''_{xy} = \kappa\Delta\kappa - n\Delta n \end{cases} \quad (3.39)$$

## 自習課題 (3) [提出の必要はありません]

- 式 (3.39) の関係式を導いてみよう。

**ヒント** 式 (3.26) の第1式  $N_{\pm}^2 = \epsilon_{xx} \pm i\epsilon_{xy}$  に  $N_{\pm} = n_{\pm} + i\kappa_{\pm}$ 、 $\epsilon_{xx} = \epsilon'_{xx} + i\epsilon''_{xx}$ 、 $\epsilon_{xy} = \epsilon'_{xy} + i\epsilon''_{xy}$  を代入すると  $(n_{\pm} + i\kappa_{\pm})^2 = \epsilon'_{xx} + i\epsilon''_{xx} + i(\epsilon'_{xy} + i\epsilon''_{xy})$  が得られる。これに、 $n_{\pm} = n \pm \Delta n/2$ 、 $\kappa_{\pm} = \kappa \pm \Delta\kappa/2$  を代入し、 $\Delta n$  および  $\Delta\kappa$  について 1 次項のみを考えると、

$$n^2 - \kappa^2 + n\Delta n - \kappa\Delta\kappa + i(2n\kappa + n\Delta\kappa + \kappa\Delta n) = \epsilon'_{xx} - \epsilon''_{xx} + i(\epsilon'_{xy} + \epsilon''_{xy})$$

同様に  $N_-^2 = \epsilon_{xx} - i\epsilon_{xy}$  について、

$$n^2 - \kappa^2 - n\Delta n + \kappa\Delta\kappa + i(2n\kappa - n\Delta\kappa - \kappa\Delta n) = \epsilon'_{xx} + \epsilon''_{xx} + i(\epsilon'_{xy} - \epsilon''_{xy})$$

これらについて、実数部同士、虚数部同士を比較することによって式 (3.39) が得られる。

## 左右円偏光に対する光学定数の差 $\Delta N$ と誘電率テンソルの成分の関係 (1)

- $\Delta n$  と  $\Delta\kappa$  を  $\epsilon_{xy}$  を使って表すと次式になります。

$$\Delta n = \frac{\kappa\epsilon'_{xy} - n\epsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2}; \quad \Delta\kappa = \frac{n\epsilon'_{xy} + \kappa\epsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2} \quad (3.40)$$

- $\Delta N$  に書き直すと

$$\Delta\hat{N} = \Delta n + i\Delta\kappa = \frac{i(n - i\kappa)(\epsilon'_{xy} + i\epsilon''_{xy})}{n^2 + \kappa^2} = \frac{i\epsilon_{xy}}{\sqrt{\epsilon_{xx}}} \quad (3.41)$$

こんな導き方もできます。  $\Delta\hat{N} = \hat{N}_+ - \hat{N}_- = \sqrt{\epsilon_{xx} + i\epsilon_{xy}} - \sqrt{\epsilon_{xx} - i\epsilon_{xy}} \approx i\frac{\epsilon_{xy}}{\sqrt{\epsilon_{xx}}}$

## ファラデー効果を $\Delta n$ 、 $\Delta\kappa$ で表す (1)

- 図 3.41 に示すように  $xz$  面を振動面とする直線偏光  $E_{in}$  が物質に入射します。ここに光の進行方向は  $z$  軸の向きである。  $x$  軸の単位ベクトルを  $i$ 、 $y$  軸の単位ベクトルを  $j$  とすると入射光の電界ベクトルは次式で与えられます。

$$E_{in} = E_0 \exp(-i\omega t) i \quad (3.42)$$

- ここで、右円偏光単位ベクトル  $r$  と、左円偏光単位ベクトル  $l$  を次式のように定義します。

$$r = (i + j)/2^{1/2}, \quad l = (i - j)/2^{1/2} \quad (3.43)$$

- 式 (3.42) を  $r$  と  $l$  を使って表すと、

$$E_{in} = E_0 \exp(-i\omega t) (r + l) \quad (3.44)$$

- のように表されます。

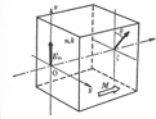


図 3.41 磁気円二色性  
光の進行方向 ( $z$  軸) の向きに、入射直線偏光の電界ベクトルを  $x$  軸にとり、右円偏光の振動面を  $xz$  面とする。

## ファラデー効果を $\Delta n$ 、 $\Delta\kappa$ で表す (2)

- 物質中の複素屈折率は右円偏光に対しては  $N_+$ 、左円偏光に対しては  $N_-$  である。表面を  $z=0$  とし物質中の  $z=\zeta$  の位置では、位相がそれぞれ  $i\omega N_+ \zeta/c$  および  $i\omega N_- \zeta/c$  だけ進むので、

$$\begin{aligned} E_{out} &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp(-i\omega t) \left\{ \exp(i\omega N_+ \zeta/c) r + \exp(i\omega N_- \zeta/c) l \right\} \\ &= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{\zeta}{c}\right)\right\} \left\{ \exp(i\omega \frac{\Delta N}{2c} \zeta) r + \exp(-i\omega \frac{\Delta N}{2c} \zeta) l \right\} \end{aligned} \quad (3.45)$$

と表されます。第2式では

$$N_+ = N + \Delta n/2, \quad N_- = N - \Delta n/2 \quad \text{と置き換えました。}$$

## ファラデー効果を $\Delta n$ 、 $\Delta\kappa$ で表す (3)

- ここで、ふたたび、もとの  $xy$  座標系に戻すと

$$E_{out} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{\zeta}{c}\right)\right\} \times \left[ \left\{ \exp(i\omega \frac{\Delta n}{2c} \zeta) + \exp(-i\omega \frac{\Delta n}{2c} \zeta) \right\} i + \left\{ \exp(i\omega \frac{\Delta n}{2c} \zeta) - \exp(-i\omega \frac{\Delta n}{2c} \zeta) \right\} j \right] \quad (3.45')$$

さらに式 (3.38) を使って書き直すと

$$E_{out} = E_0 \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{\zeta}{c}\right)\right\} \times \left[ \left\{ \cos\left(\frac{\omega\Delta n}{2c} \zeta\right) - i \frac{\omega\Delta\kappa}{2c} \zeta \sin\left(\frac{\omega\Delta n}{2c} \zeta\right) \right\} i - \left\{ \sin\left(\frac{\omega\Delta n}{2c} \zeta\right) + i \frac{\omega\Delta\kappa}{2c} \zeta \cos\left(\frac{\omega\Delta n}{2c} \zeta\right) \right\} j \right] \quad (3.46)$$

## ファラデー効果を $\Delta n$ 、 $\Delta\kappa$ で表す (4)

- 図 3.51 に示すように、座標系を  $z$  軸の回りに  $\theta = -(\omega\Delta n\zeta/2c)$  だけ回転した座標系を  $x'y'z'$  で表しその単位ベクトルを  $i', j', k'$  とすると、座標変換の式は

$$\begin{pmatrix} i' \\ j' \\ k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

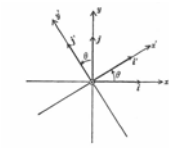


図 3.51  $z$  軸のまわりに  $\theta$  だけ回転した座標系  $x'y'z'$  は  $xy$  平面に垂直な向きにとる。

で表せる。これを使って  $E_{out}$  は次のように書き直せます。

$$E_{out} = E_0 \exp\left\{-i\omega\left(t - \frac{\zeta}{c}\right)\right\} \left\{ i' - i \frac{\omega\Delta\kappa}{2c} \zeta j' \right\} \quad (3.48)$$

## ファラデー効果を $\Delta n$ 、 $\Delta\kappa$ で表す (5)

- もし、磁気円二色性がないとすると  $\Delta\kappa=0$  であるから、 $E_{out}$  は  $i'$  成分のみとなり、 $x'$  軸方向の直線偏光であることがわかります。入射直線偏光は  $x$  軸から  $x'$  軸へ  $\theta$  だけ回転したのである。これがファラデー回転角  $\theta_F$  である。すなわち、ファラデー回転角は

$$\theta_F = -\frac{\omega\Delta n}{2c} \zeta \quad (3.49)$$

$\Delta\kappa \neq 0$  のときは、式 (3.48) は  $x$  軸を長軸、 $y$  軸を短軸とする楕円偏光になります。この楕円偏光の楕円率  $\eta_F$  は短軸と長軸の振幅の比で与えられ

$$\eta_F = -\frac{\omega\Delta\kappa}{2c} \zeta \quad (3.51) \quad \text{と表されます。}$$



## ファラデー効果を $\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}$ で表す(1)

- いま、複素ファラデー回転角  $\Phi_F = \theta_F + i\eta_F$  (3.52)

を  
によって定義すると

$$\Phi_F = -\frac{\omega}{2c}(\Delta n + i\Delta\kappa)\zeta = -\frac{\omega\Delta\hat{N}}{2c}\zeta \quad (3.53)$$

と書けます。この式に式(3.41)  $\Delta\hat{N} = \frac{i\epsilon_{xy}}{\sqrt{\epsilon_{xx}}}$ を代入すると

$$\Phi_F = -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{i\epsilon_{xy}}{\sqrt{\epsilon_{xx}}}\zeta \quad (3.54)$$

となり、複素ファラデー回転角は比誘電率の非対角成分 $\epsilon_{xy}$ に比例し、対角成分 $\epsilon_{xx}$ の平方根に反比例することがわかります。

## ファラデー効果を $\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}$ で表す(2)

- 式(3.54)を実数部と虚数部に分けて記述すると

$$\begin{aligned} \theta_F &= -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{\kappa\epsilon'_{xy} - n\epsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2}\zeta \\ \eta_F &= -\frac{\omega}{2c} \cdot \frac{n\epsilon'_{xy} + \kappa\epsilon''_{xy}}{n^2 + \kappa^2}\zeta \end{aligned} \quad (3.55)$$

このように、ファラデー回転角と楕円率は誘電率テンソルの非対角成分の実数部と虚数部の線形結合で表されることがわかりました。

## ファラデー効果を $\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}$ で表す(3)

- 通常ファラデー効果は、透明な領域で測定されるので、式(3.55)において $\kappa=0$ と置くと、

$$\begin{aligned} \theta_F &= \frac{\omega\epsilon''_{xy}}{2cn}\zeta \\ \eta_F &= -\frac{\omega\epsilon'_{xy}}{2cn}\zeta \end{aligned} \quad (3.57)$$

となつて、回転角が $\epsilon''_{xy}$ の虚数部に、楕円率が $\epsilon'_{xy}$ の実数部に対応することがわかりました。

磁化 $M$ による展開式を代入すると

$$\Phi_F \approx -\frac{i\pi l}{\lambda} \cdot \frac{\epsilon_{xy}^{(1)} M}{\sqrt{\epsilon_{xx}^{(0)} + \frac{1}{2}\epsilon_{xx}^{(2)} M^2}}$$

となり、磁気光学効果は $M$ の小さいときほど $M$ に比例します。

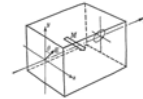
## フォークト配置の磁気光学

- 磁化 $M$ に垂直な $x$ 軸に平行に進む波( $N/x$ )に対しては、波動関数は、

$$E = E_0 \exp[-i\omega(t - Nx/c)] \quad (3.29)$$

- と表されます。固有方程式は

$$\begin{pmatrix} -\epsilon_{xx} & -\epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & N^2 - \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & N^2 - \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.30)$$



- となるので、永年方程式は次の式で表されます。

$$\begin{pmatrix} -\epsilon_{xx} & -\epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & N^2 - \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & N^2 - \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.31)$$

## フォークト配置の場合の固有値

- $N^2$ の固有値として

$$\hat{N}_1^2 = \epsilon_{xx} + \frac{\epsilon_{xy}^2}{\epsilon_{xx}} \quad \text{および} \quad \hat{N}_2^2 = \epsilon_{xx}$$

という2つの解を得ます。対応する固有関数は

$$E_1 = A \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{\hat{N}_1}{c}x\right)\right] (\epsilon_{xy}i - \epsilon_{xx}j) \quad (3.33)$$

$$E_2 = B \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{\hat{N}_2}{c}x\right)\right] k$$

となり、磁気複屈折を生じます。

## コットンムートン効果

- コットンムートン効果は光の進行方向と磁界とが垂直な場合(フォークト配置)の磁気光学効果です。
- この効果は磁化 $M$ の偶数次の効果であつて磁界の向きに依存しません。
- いま、磁化 $M$ が存在すると $M$ の方向に一軸異性が誘起され、 $M$ 方向に振動する直線偏光(常光線)と $M$ に垂直の方向に振動する光(異常光線)とに対して屈折率の差が生じて、複屈折を起こす現象です。
- 磁化のある場合の誘電率テンソルの対角成分 $\epsilon_{xx}(M)$ と $\epsilon_{zz}(M)$ が一般的には等しくないことから生じます。 $\epsilon$ テンソルの対角成分はその対称性から $M$ について偶数次でなければなりません。複屈折によって生じる光学的遅延も $M$ の偶数次となります。
- コットンムートン効果は導波路型光アイソレータにおいて、モード変換部として用いられます。

## 今回学んだこと

- 光の伝搬をマクスウェルの方程式で記述すると、磁化された等方性物質の屈折率 $N$ は与えられる2つの固有値をとり、それぞれが右円偏光および左円偏光に対応します。(ここに、 $\epsilon_{xx}$ は誘電率テンソルの対角成分、 $\epsilon_{xy}$ は非対角成分です。)もし、 $\epsilon_{xy}$ が0であれば、円偏光は固有関数ではなく、磁気光学効果は生じません。
- 長さ $l$ の磁性体におけるファラデー回転角 $\theta$ およびファラデー楕円率 $\eta$ は、左右円偏光に対する屈折率の差 $\Delta n$ および消光係数の差 $\Delta\kappa$ を用いて表すことができます。
- さらに、ファラデー回転角と楕円率は誘電率テンソルの非対角成分の実数部と虚数部の線形結合で表されることがわかりました。
- また、磁化が光の進行方向に対して垂直なフォークト配置ではコットンムートン効果という磁気複屈折現象が生じることを学びました。

## 課題

- $Z$ 軸に平行に進む波に対して固有方程式(3.22)は(3.24)になること、および、 $E$ の如何に関わらず成立するには(3.25)が成立すること、固有値が(3.26)で与えられることを導いてください。

$$\begin{pmatrix} \hat{N}^2 - \epsilon_{xx} & -\epsilon_{xy} & 0 \\ \epsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (3.24)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{N}^2 - \epsilon_{xx} & -\epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xy} & \hat{N}^2 - \epsilon_{xx} \end{vmatrix} = 0 \quad (3.25)$$

$$\hat{N}_{\pm}^2 = \epsilon_{xx} \pm i\epsilon_{xy} \quad (3.26)$$

## 本日のミニレポート

- 誘電率テンソルの対角成分の実数部 $\epsilon'_{xx}$ ・虚数部 $\epsilon''_{xy}$ を屈折率 $n$ と消光係数 $\kappa$ を用いて表せ。