

### 第3章 光と磁気現象論

前章では、磁気光学効果がどのような現象であるのかについて概略を述べた。第3章ではこの効果が物質のどのような性質に基づいて生じるかを述べる。この章では物質のミクロな性質には目をつぶって、物質を連続体のように扱い、偏光が伝わる様子を電磁波の基本方程式であるマクスウェルの方程式によって記述する。物質の応答は誘電率によって表す。この章ではこのようなマクロな立場に立って磁気光学効果がどのように説明できるかについて述べる。この章では、第2章とは違ってやや煩雑な式を使うことになるが、しばらくの間我慢してほしい。ほとんどの式は読者が自ら誘導できるように、問題などの形で補ったつもりである。忙しい読者は各節の終わりのまとめだけを読んでいただければよい。誘電率はミクロな電子構造によって記述されるのであるが、これについては第4章で述べる。

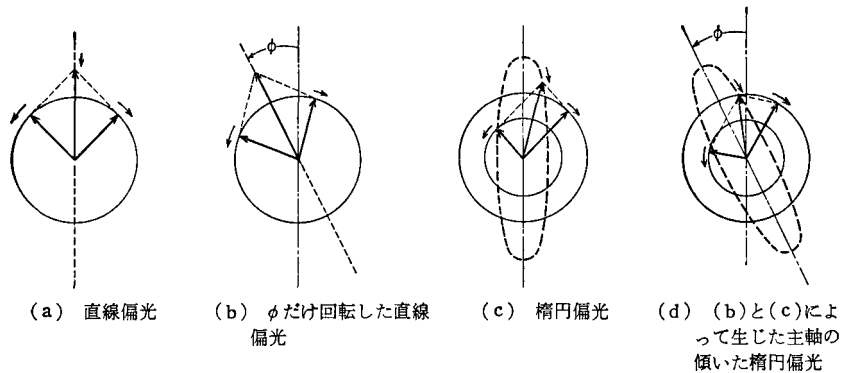
#### 3.1 円偏光と磁気光学効果

ここでは旋光性や円二色性が左右円偏光に対する物質の応答の差に基づいて生じることを説明する。

図3.1において、光は紙面に垂直に裏側に向かっていているものとする。2章の約束に従って、時計回りの電界ベクトルを右円偏光、反時計回りの電界ベクトルを左円偏光と定義する。

直線偏光の電界ベクトルの軌跡は(a)のように、振幅と回転速度が等しい右円偏光と左円偏光との合成で表される。(a)の直線偏光が物質を透過したとき、もし透過後の光の左円偏光が(b)のように右円偏光よりも位相が進んでいたとするとこれらを合成した

電界ベクトルの軌跡は、もとの直線偏光から傾いたものになる。この傾きの角が旋光角と呼ばれ、右円偏光と左円偏光の位相差の半分に等しい。一方、(c)のように右円偏光と左円偏光のベクトルの振幅に差が生じたとき、それらの合成ベクトルの軌跡は楕円になる。このような性質を円(偏光)二色性(Circular Dichroism: CD)と呼ぶ。楕円偏光の楕円率は楕円の短軸と長軸の長さの比の逆正接( $\arctangent: \tan^{-1}$ )であるが、この比が小さいときは長さの比としてもさしつかえない。以上は左右円偏光の位相と振幅の違いを別々に考えたのであるが、現実には両方が同時に生じるので、合成ベクトルは(d)のように主軸の傾いた楕円偏光になっている。



旋光性と円二色性の起源

- (a) 直線偏光の電界ベクトルは右まわりと左まわりの2つの円偏光ベクトルに分解できる。
- (b) 物質を透過したとき右まわり成分が左まわり成分よりも位相が進んでいたとすると、合成したベクトルの軌跡は入射偏光から傾いた直線偏光となる。
- (c) 物質を透過したとき右まわり成分と左まわり成分の振幅に違いが生じると、合成したベクトルは楕円偏光になる。
- (d) 右まわり成分と左まわり成分の振幅と位相の両方に違いがあると主軸の傾いた楕円偏光になる。

このように、旋光性や円二色性は右円偏光と左円偏光に対する物質の応答の違いがあるために生じるということがおわかりいただけたと思う。左右円偏光に対する物質の応答の違いはマクロには誘電テンソルまたは伝導率テンソルの非対角成分から生じることが、マクスウェル方程式を用いて説明できる。このことは3.3節で詳しく論じる。

なお、上述の話は磁気光学効果の場合だけでなく、光学活性一般で成り立つ話であると理解されたい。

#### • 3.1節のまとめ

直線偏光：右円偏光と左円偏光に分解できる

旋光性：物質中で右円偏光と左円偏光の位相に差が生じたとき起きる

円二色性：右円偏光と左円偏光に対する物質の吸収に差が生じたとき起きる

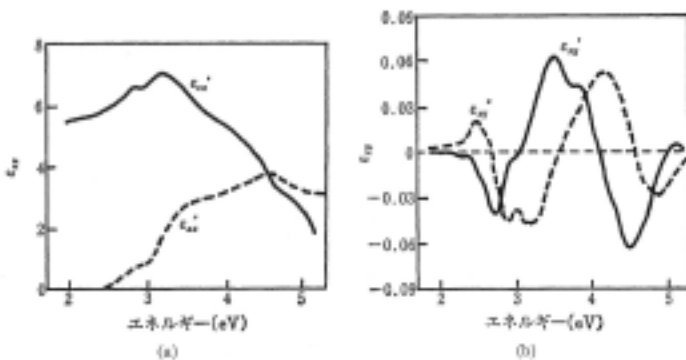


図3.4 Bi<sub>2</sub>O<sub>3</sub>を添加したYIGの誘電率テンソルのスペクトル<sup>1)</sup>  
実線は実数部、点線は虚数部。

#### 3.2 光と物質のむすびつき<sup>1)</sup>—誘電率と伝導率—

やや先走るようであるが、3.4節の具体例(図3.6)をご覧ください。これはビスマス添加 YIG(イットリウム鉄ガーネット)の磁気光学効果に関する論文からとったものであるが、測定された反射スペクトル、ファラデー回転スペクトルなどではなく誘電率テンソルの対角、非対角成分のスペクトルが示されているのに注意して欲しい。

なぜ誘電率テンソルを用いるのであろうか。1つは、反射率やカー回転は入射角や磁化の向きに依存する量で、物質固有のレスポンスを表す量ではないが、誘電率テンソルは物質に固有の量であるからである。2番目には物質中の電子構造とか光学遷移のマトリクスとかに直接結びつけることができるのが誘電率

ンソルだからである。

連続媒体中の光の伝わり方はマクスウェルの方程式で記述される。マクスウェルの方程式については 3.3 節に詳述するが、ここでは電磁波の電界と磁界との間の関係を与える 2 階の微分方程式であると理解しておいて欲しい。このとき媒体の応答を与えるのが、誘電率  $\epsilon$  または伝導率  $\sigma$  である。磁性体中の伝搬であるから透磁率が効いてくるのではないかと考える人があるかも知れない。しかし、光の振動数くらいの高周波になると巨視的な磁化はほとんど磁界に追従できなくなるため、透磁率を  $\mu \cdot \mu_0$  としたときの比透磁率  $\mu$  は 1 として扱ってよい。およその見当としては、強磁性共鳴の振動数以上の振動数に対しては  $\mu=1$  となる。 $(\mu_0$  は真空の透磁率であり SI 単位系特有のものである。ここに、 $\mu_0=1.257 \times 10^{-6}$  H/m)<sup>1</sup>

誘電率は電束密度  $D$  と電界  $E$  の関係を与える量である。SI 単位系を用いているので誘電率は  $\epsilon\epsilon_0$  ( $\epsilon_0$  は真空の誘電率であり、 $\epsilon_0=8.854 \times 10^{-12}$  F/m である<sup>1</sup>) で与えられる。ここに  $\epsilon$  は比誘電率と呼ばれる量で CGS 系の誘電率に等しい。以下では、この比誘電率を用いて議論を進める。

$D$  と  $E$  との間には、

$$\mathbf{D} = \tilde{\epsilon} \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (3.1)$$

なる関係が成り立つ。 $D$  も  $E$  もベクトルなのでベクトルとベクトルの関係を与える量である  $\tilde{\epsilon}$  は 2 階のテンソル量である。2 階のテンソルというのは、2 つの添字をつかって表される量で、 $3 \times 3$  の行列と考えてさしつかえない。(テンソルを表すため記号  $\sim$  (チルダ)をつける)

同様に伝導率  $\sigma$  も電流密度  $J$  と電界  $E$  の関係を与える量なのでテンソルで表される。

$$\mathbf{J} = \tilde{\sigma} \mathbf{E} \quad (3.2)$$

このように比誘電率  $\tilde{\epsilon}$  も伝導率  $\tilde{\sigma}$  も 9 個のテンソル成分で記述できる。光の話をしているのになぜ電流が出てくるのか疑問に思われるかもしれない。マクスウェルの式によると物質中の電流には伝導電流のほかに変位電流という電束密度の時間微分  $\partial D/\partial t$  にもとついて流れる電流を考慮すべきであることがわかる。上述の  $J$  はこの変位電流をも含んだ一般的な電流なのである。

比誘電率テンソル  $\tilde{\epsilon}$  は次式で表される。

$$\tilde{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$\tilde{\epsilon}$  の成分は一般に複素数なので

$$\epsilon_{ij} = \epsilon'_{ij} + i\epsilon''_{ij} \quad (3.4)$$

のように表すことにする。一方、伝導率テンソル  $\tilde{\sigma}$  は

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

で与えられる。 $\tilde{\sigma}$  の成分も一般に複素数であるから

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} + i\sigma''_{ij} \quad (3.6)$$

で表す。文献では  $\sigma$  の単位として CGS 系の [ $s^{-1}$ ] が用いられることが多いが、SI 系では単位は [S/m] である。CGS 系の  $\sigma$  と SI 系の  $\sigma$  との間には [ $\sigma_{SI} = [\sigma]_{CGS} \times 9^{-1} \times 10^9$ ] なる関係が成立する。ただし、光速  $c=3 \times 10^8$  [m/s] とした。

次節(p.\*\*)で述べるように  $\tilde{\epsilon}$  の成分  $\epsilon_{ij}$  と  $\tilde{\sigma}$  の成分  $\sigma_{ij}$  との間には次の関係が成り立つ。

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + i \frac{\sigma_{ij}}{\omega \epsilon_0} \quad [\text{SI}] \quad (3.7)$$

ここに  $\delta_{ij}$  は、クロネッカーのデルタと呼ばれるもので、 $i=j$  であれば 1、 $i \neq j$  ならば 0 を表す。 $\omega$  の単位は [rad/s] を用いる。文献で  $\sigma_{ij}$  が CGS で与えられているときは、

$$\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + i \frac{4\pi\sigma_{ij}}{\omega} \quad [\text{CGS}] \quad (3.8)$$

によって、 $\tilde{\epsilon}$  に換算できる。以下では  $\tilde{\epsilon}$  と  $\tilde{\sigma}$  とを併記することはしないで、 $\tilde{\epsilon}$  の方だけを示しておく。 $\tilde{\sigma}$  になおすには式(3.7)あるいは(3.8)を用いればよい。

比誘電率  $\tilde{\epsilon}$  と伝導率  $\tilde{\sigma}$  のいずれを用いて記述してもよいのであるが、一般には金属を扱うときは  $\tilde{\sigma}$  の方を、絶縁体であれば  $\tilde{\epsilon}$  の方を用いるのが普通である。第 4 章の図 4.2 に示すように、金属の場合  $\omega \rightarrow 0$  の極限すなわち直流において  $\epsilon_{xx}$  は自由電子の遮蔽効果のために発散してしまうが、 $\sigma_{xx}$  は有限の値に収束するので都合がよいからである<sup>2</sup>。

<sup>1</sup> 通常比透磁率は  $\mu_r$ 、比誘電率は  $\epsilon_r$  と書かれるが、本書では、CGS 単位系の透磁率と誘電率との整合性を考え、それぞれ、 $\mu$ 、 $\epsilon$  と書く。

<sup>2</sup> 4.1 で示すように、金属においてはドルーデの式が成り立つ。

一方、絶縁体では  $\omega \rightarrow 0$  で  $\sigma$  は 0 に近づくが  $\varepsilon$  は有限値に収束するので扱いやすい。

以下では簡単のため等方性の物質を考える。このとき、 $\tilde{\varepsilon}$  は磁化がなければ次のように書き表すことができる。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{xx} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

もし、図 3.2 に示すように磁化  $M$  の方向に  $z$  軸をとると  $z$  軸が異方軸となる一軸異方性が生じる。 $\tilde{\varepsilon}$  は  $z$  軸の周りの任意の回転に対して不変であるから、例えば、 $90^\circ$  の回転  $C_4$  を施して

$$C_4^{-1} \tilde{\varepsilon} C_4 = \tilde{\varepsilon} \quad (3.10)^3$$

という関係が成り立ち、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{yx} &= -\varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} &= \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zy} = 0 \end{aligned} \quad (3.11)^4$$

が導かれる。 $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{zz}$  である必要はない。

従って、磁化のあるときの等方性物質のテンソルは簡単に次のように書ける。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

すなわち、 $\tilde{\varepsilon}$  を表すには 3 つのパラメータでよいということになる。マクスウェルの方程式 (次節) のところで説明するが、ふつうの屈折や反射などに効くのは、対角成分  $\varepsilon_{xx}$  (または  $\sigma_{xx}$ ) であり、一方光学活性に効くのは非対角成分  $\varepsilon_{xy}$  (あるいは  $\sigma_{xy}$ ) であることが導かれる。磁気光学効果の原因となる右円偏光と左円偏光に対する媒体の応答の差をもたらすのは、これら非対角成分である。

さて、磁気光学効果において  $\tilde{\varepsilon}$  の各成分は  $M$  の関数であるから、 $\tilde{\varepsilon}$  は次式のように表せるはずである。

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}(M) & \varepsilon_{xy}(M) & 0 \\ -\varepsilon_{xy}(M) & \varepsilon_{xx}(M) & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}(M) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

$\varepsilon_{ij}(M)$  を次式のように  $M$  でべき級数展開する。

この式は誘電率で表すと  $\varepsilon_{xx} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$  となるので  $\omega \rightarrow 0$  に対し  $\varepsilon \rightarrow \infty$  と発散するが、伝導率で表すと  $\sigma_{xx} = \frac{i\varepsilon_0\omega_p^2}{\omega + i\gamma}$  となり、 $\omega \rightarrow 0$

に対し  $\sigma \rightarrow \frac{\varepsilon_0\omega_p^2}{\gamma}$  となって有限の値をもつ。

<sup>3</sup>一般に座標軸の回転を  $R$  という行列で表す。 $\varepsilon$  は電界  $E$  を基底として表されているが、この電界  $E$  に回転  $R$  を施すと  $E'$  になるとする。これを  $E' = RE$  と書く。 $\varepsilon$  が  $R$  に対して不変ということは、電束  $D = \varepsilon E$  に回転  $R$  を施したものを  $R(\varepsilon E)$  が新しい基底  $E'$  に対して同じ  $\varepsilon$  を使って表されることを意味する。すなわち  $R(\varepsilon E) = \varepsilon E'$ 。従って、 $\varepsilon E' = R^{-1}(\varepsilon E) = R^{-1}\varepsilon RE$ 。これより  $R^{-1}\varepsilon R = \varepsilon$  となる。

<sup>4</sup> $C_4$  というのは  $z$  軸の回りの  $90^\circ$  の回転であるから、

$$Ex' = C_4 Ex = Ey, \quad Ey' = C_4 Ey = -Ex$$

のように変換する。 $C_4$  を行列で表すと、

$$C_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ であるから、} C_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3.10) 式に代入して、

$$C_4^{-1} \tilde{\varepsilon} C_4 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{yy} & -\varepsilon_{yx} & -\varepsilon_{yz} \\ -\varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xz} \\ -\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \equiv \tilde{\varepsilon}$$

両辺の各成分を比較することにより、(3.11) 式が得られる。

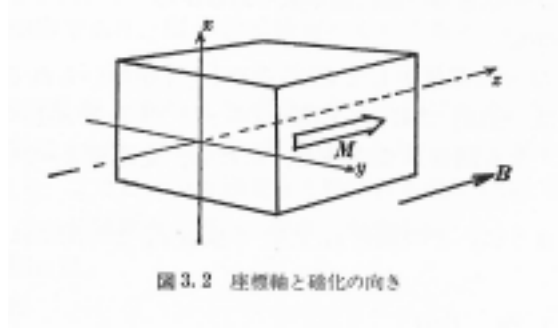


図 3.2 座標軸と磁化の向き

$$\varepsilon_{ij}(M) = \varepsilon_{ij}^{(0)} + \sum_n \frac{1}{n!} \varepsilon_{ij}^{(n)} M^n \quad (3.14)$$

ここで、Onsager によって導かれた関係式

$$\varepsilon_{ij}(-M) = \varepsilon_{ji}(M) \quad (3.15)$$

を考慮すると、対角成分は  $M$  の偶数次のみ、非対角成分は  $M$  の奇数次のみで展開できることが導かれる<sup>5</sup>。すなわち、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}(M) &= \varepsilon_{xx}^{(0)} + \sum_n \varepsilon_{xx}^{(2n)} M^{2n} / (2n)! \\ \varepsilon_{xy}(M) &= \sum_n \varepsilon_{xy}^{(2n+1)} M^{2n+1} / (2n+1)! \\ \varepsilon_{zz}(M) &= \varepsilon_{zz}^{(0)} + \sum_n \varepsilon_{zz}^{(2n)} M^{2n} / (2n)! \end{aligned} \quad (3.16)$$

ここに  $\varepsilon_{ij}^{(n)}$  は  $M$  に独立な  $n$  次の展開係数である。

3.3 節に述べるように  $\varepsilon_{xy}(M)$  がファラデー効果やカー効果をもたらし、 $\varepsilon_{xx}(M)$  と  $\varepsilon_{zz}(M)$  の差が磁気複屈折 (コットン・ムートン効果) の原因となる。

---

<sup>5</sup> (3.15)式より、対角成分については

$$\varepsilon_{xx}(-M) = \varepsilon_{xx}(M) \quad \text{および} \quad \varepsilon_{zz}(-M) = \varepsilon_{zz}(M)$$

が成立することから、 $\varepsilon_{xx}$ 、 $\varepsilon_{zz}$  は  $M$  について偶関数であることが分る。また非対角成分については、

$$\varepsilon_{xy}(-M) = \varepsilon_{yx}(M) = -\varepsilon_{xy}(M)$$

が成り立つことから  $\varepsilon_{xy}$  は  $M$  について奇関数であることがわかる。